Diss. Rostock
1905
J. Behrens

Über
Refraktion von Schallstrahlen in der Atmosphäre.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Paul Behrens,

aus Kröpelin i. Meckl.

Rostock.

Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

1905.

Referent: Prof. Dr. phil. et med. L. Matthiessen.

Meinen Eltern

in Dankbarkeit!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552723_0102

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Historische Einleitung 7

§ 1. Die allgemeine Integralgleichung 12

§ 2. Die Mohnsche Kreisgleichung 15

§ 3. Die Rayleighsche Kettenlinie 20

§ 4. Die Matthiessensche Parabel 23

§ 5. Andere Elemente der Luftbeschaffenheit 26

Schlußfolgerungen 28

Historische Einleitung.

Ist in einem geschlossenen Raume die Luft homogen verteilt, so werden diesen Raum durchflutende Lichtstrahlen einen geraden Weg nehmen; wenn dagegen in dem Raume die Luft in homogenen Schichten von verschiedener Dichte lagert, so wird die Trajektorie der Strahlen nach dem physikalischen Gesetz beim Übergang von einer dünneren in eine dichtere Schicht nach der Normalen hin gebrochen, also nicht mehr eine Gerade, sondern eine mehr oder minder gebrochene Linie bilden. Ist nun die Dicke der einzelnen Schichten unendlich klein, so geht die gebrochene Linie in eine Kurve über. So beschreibt ein nicht senkrecht gegen die Erdoberfläche auffallender Lichtstrahl der Sonne oder eines Sterns in der Atmosphäre eine Kurve, die genau untersucht worden ist, und stets in der Astronomie ihre Anwendung findet bei der Bestimmung des wahren und scheinbaren Ortes eines Himmelskörpers.

Da aber ebenso wie das Licht auch die Schallstrahlen eine Wellenbewegung sind, so kam man bald zu der Entdeckung, daß auch die Schallstrahlen eine Refraktion erfahren, und daß ein Schallstrahl beim Übergang von einem Medium in ein anderes nach dem

Snelliusschen Gesetze gebrochen wird. Es verhalten sich also die Sinus der Brechungswinkel wie die Schallgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien. Und bald zeigte sich, daß, analog dem Licht, dieses Gesetz auch seine Anwendung findet bei verschiedenen Schichten desselben Mediums.

Im Jahre 1873 machte Tyndall[1]) an den South Foreland-Felsen und später in den Jahren 1890—95 Prof. Mohn in Christiania[2]) Beobachtungen, durch die zweifellos bewiesen wurde, daß ein Schall von konstanter Stärke in ruhiger Atmosphäre bis zu sehr verschiedenen Entfernungen hörbar sein kann. Tyndall[3]) suchte diese Tatsache zu erklären durch seine „Theorie der akustischen Wolken". Er nahm an, die Luft sei in vertikale heterogene Schichten von verschiedener physikalischer Beschaffenheit geteilt, und beim Übergang von einer zur andern Schicht werde an der Grenzfläche jedesmal ein Teil des Schalles reflektiert.

Diese Theorie genügte indessen nicht, um die tatsächlichen Ergebnisse zu erklären, und so ersetzte im September 1874 Prof. Reynolds[4]) diese Theorie durch eine andere. Er nahm an, der Schall werde analog der atmosphärischen Refraktion des Lichtes

---

[1]) Reynolds, On the Refraction of sound by the Atmosphere. Phil. Mag. (4) 50, 1875, p. 74 ff.

[2]) Mohn, Studien über Nebelsignale. Annalen der Hydrographie 1892, 1893, 1895.

[3]) Tyndall, Der Schall, deutsch von A. v. Helmholtz und Cl. Wiedemann, 3. Aufl., 1897, Braunschweig.

[4]) Phil. Mag. (4) 50, 1875, p. 71 ff.; siehe auch [1]).

durch heterogene horizontale Luftschichten aufwärts gebrochen. Damit legte er den ersten Grund zu der noch heute gültigen Theorie der Refraktion des Schalles.

Mit bezug auf Reynolds stellte dann im Jahre 1880 Kneser[5]) eine allgemeine Differentialgleichung der Schallkurve auf und diskutierte die Hörweite an einigen speziellen Beispielen. Einen Schritt weiter ging dann Lord Rayleigh in seiner bekannten Theorie des Schalles[6]), indem er eine endliche Gleichung für die Strahlen aufstellte. Er fand, daß unter gewissen Voraussetzungen die Schallstrahlen annähernd Kettenlinien beschreiben.

Prof. Mohn in Christiania hatte bei seinen oben erwähnten Versuchen[7]) genaue Beobachtungen der Temperatur, der Temperaturabnahme mit der Höhe, des Barometerstandes und auch der Windbewegung angestellt: Er fand, wie zu erwarten war, bei verschiedener Hörbarkeit des Schalles auch verschiedene Zustände der Atmosphäre. Durch physikalische Überlegungen und mathematische Berechnungen stellte er, wohl anschließend an die Tyndall-Reynoldschen Untersuchungen, Gesetze auf, nach denen sich der Schall in der heterogenen Atmosphäre fortpflanzt. Er

[5]) Kneser, Über atmosphärische Schallstrahlenbrechung. Ann. d. Phys., 1880, XI.

[6]) Rayleigh, Die Theorie des Schalles, deutsch v. Neesen. 1880, Braunschweig, Bd. II, § 288.

[7]) Siehe [2]).

fand, daß die Schallstrahlen unter gewissen Voraussetzungen Kreise seien. Diese seine Voraussetzungen aber beschränkten die Anwendung der Kreise, so daß er in seinen weiteren Untersuchungen wieder von ihnen absieht. Auch zwei parabolische Formeln, die Mohn durch Vernachlässigung eines Gliedes der Kreisgleichung erhält, untersucht er nicht weiter.

Im Jahre 1899 bearbeitete Prof. Matthiessen die Theorie der atmosphärischen Refraktion der Schallstrahlen[8]) analog der astronomischen Refraktion der Lichtstrahlen nach Laplace und Bessel und erweiterte damit gleichzeitig die Mohnsche Theorie. Von den Parabeln, die Mohn nicht untersucht hatte, stellte Prof. Matthiessen die Gleichungen auf, diskutierte sie und belegte sie mit verschiedenen praktischen Beispielen.

Von der alleinigen Annahme ausgehend, daß sich die Windgeschwindigkeit proportional der Höhe ändere, ohne Berücksichtigung der Temperaturveränderung, fand im Jahre 1896 Dr. G. Jäger[9]), daß die Schallstrahlen Kreise beschreiben.

Eine Anwendung der Refraktionstheorie auf das Wetterleuchten machte im Jahre 1895 Meinardus[10]),

[8]) Matthiessen, L., Theorie der atmosphärishen Refraktion der Schallwellen. Abh. d. deutsch. Akad. d. Naturforscher 1899, 74, 4.

[9]) Jäger, Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft. Sitzber. d. Wien. Akad. CV. Abt. IIa, Dez. 1896.

[10]) Meinardus, Über das Wetterleuchten. Meteorol. Zeitschrift 1895.

und Stahlberg[11]) gibt einen kurzen Überblick über diesen Gegenstand ohne mathematische Untersuchungen.

Auch Wierz[12]) kommt in seiner Inaug.-Diss. auf die Bahnen der Schallstrahlen. Er zieht jedoch nur eine kurze Analogie mit den Lichtstrahlen und behandelt genauer nur ein von Prof. Matthiessen gegebenes Beispiel von den Parabeln der Schallstrahlen indem er die Lage des Schallschattens durch die Enveloppe der Strahlen bestimmt.

Wenn wir nun den heutigen Stand der Refraktionstheorie des Schalles überblicken, so sehen wir, daß die verschiedenen Forscher unter verschiedenen Voraussetzungen zu verschiedenen Resultaten gelangt sind, und zwar ergeben sich besonders drei Bahnkurven: Die Kettenlinie von Lord Rayleigh, der Kreis von Prof. Mohn (Jäger) und die Parabel von Prof. Matthiessen.

In der vorliegenden Schrift wollen wir nun die allgemeine Gleichung untersuchen, wollen sehen, unter welchen Voraussetzungen sich aus dieser allgemeinen Gleichung die verschiedenen Kurven ergeben und welche Kurve unter Berücksichtigung der neuesten Erforschung der Atmosphäre der wirklichen Trajektorie der Schallstrahlen in der Natur am nächsten kommt.

---

[11]) Stahlberg, Zur Ausbreitung des Schalles in der Luft. Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr., 1903, Heft 1.

[12]) Wierz, Beiträge zur Theorie der Lichtbahnen und Wellenflächen. Inaug.-Diss., 1901, Rostock.

§ 1.

Die allgemeine Integralgleichung.

Um nun zunächst die allgemeine Gleichung jedes Schallstrahles abzuleiten, wollen wir über die Ab- oder Zunahme der Schallgeschwindigkeit mit der Höhe keine andere Voraussetzung machen, als die einer beliebigen, kontinuierlich nach oben veränderlichen Beschaffenheit der Atmosphäre, so daß die Schallgeschwindigkeit sich in dem betrachteten Gebiet mit der Höhe stetig, nicht sprungweise, ändert.

Denken wir uns zunächst zwei horizontale Luftschichten (Fig. 1). Die obere, in der sich die Schallquelle O befinde, habe die Schallgeschwindigkeit v_0. Ein Schallstrahl möge mit der Neigung i_0 gegen die Vertikale von der Schallquelle O ausgehen und unter der Neigung i_1 zur Normalen in die untere Schicht mit der Schallgeschwindigkeit v_1 gelangen. Dann ist

$$\frac{\sin i_0}{\sin i_1} = \frac{v_0}{v_1}; \quad \frac{v_0}{\sin i_0} = \frac{v_1}{\sin i_1}.$$

Die Ebene, die wir durch den Strahl in seiner ursprünglichen und gebrochenen Richtung legen, ist eine senkrechte und sei die Ebene der Zeichnung. Wenn nun der Strahl in die nächst tiefere Schicht mit der

Schallgeschwindigkeit v_2 unter dem Winkel i_2 eintritt, so bleibt er in der vertikalen Ebene, und es ist

$$\frac{v_0}{\sin i_0} = \frac{v_1}{\sin i_1} = \frac{v_2}{\sin i_2}.$$

Lassen wir so den Strahl die dritte, vierte bis n-te Schicht passieren, so ist stets

$$(1) \qquad \frac{v_0}{\sin i_0} = \frac{v_1}{\sin i_1} = \frac{v_2}{\sin i_2} = \cdots \frac{v_n}{\sin i_n} = a$$

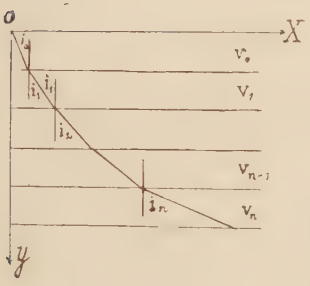

Fig. 1.

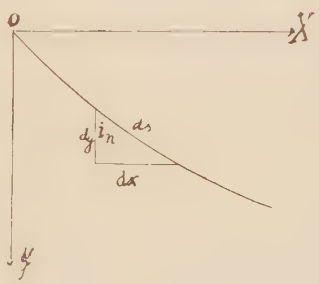

Fig. 2.

Lassen wir jetzt die einzelnen Schichten unendlich dünn werden, gehen wir also zum Differential über, so wird die gebrochene Linie in eine Kurve übergehen (Fig. 2), und es ist

$$\operatorname{tg} i_n = \frac{\sin i_n}{\sqrt{1 - \sin^2 i_n}} = \frac{dx}{dy}.$$

Setzen wir für $\sin i_n$ nach (1) seinen Wert ein, so erhalten wir

$$dx = \frac{v_n \cdot dy}{\sqrt{a^2 - v_n^2}}.$$

Die Integration ergibt

$$(2) \qquad x = \int \frac{v_n \cdot dy}{\sqrt{a^2 - v_n^2}}; \quad a = \frac{v_0}{\sin i_0} \text{ nach (1)}$$

Dies ist die allgemeine Integralgleichung für jeden Strahl, der in der unendlich dünnen Schicht n die Schallgeschwindigkeit v_n hat und unter der Neigung i_0 von der Schallquelle ausgeht. In dieser Gleichung (2) ist nun zunächst v_n eine noch unbekannte Funktion der Variabeln.

Setzen wir jetzt v_n konstant, d. h. haben wir einen mit homogener Atmosphäre erfüllten Raum, so wird die Gleichung

$$x = \frac{v \cdot y}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \quad v_0 = v_n = v; \quad a = \frac{v}{\sin i_0}.$$

$$x = y \operatorname{tg} i_0.$$

Das ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Nullpunkt geht und unter der Neigung i_0 zur y-Achse von der Schallquelle O ausgeht.

§ 2.

Die Mohnsche Kreisgleichung.

Die Schallgeschwindigkeit ist nun aber in der Atmosphäre keine Konstante, sondern mit dem Orte variabel. Sie ist abhängig von der Temperatur, der Windbewegung und dem Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre, und diese drei Elemente sind selbst wieder abhängig von der Höhe. Es ist die Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde

$$(3) \qquad v = 332 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{\gamma}{b} \cdot e}} + w \cos p \; [13])$$

In dieser Formel bedeutet γ die Feuchtigkeitskonstante 0,3779; e den Dampfdruck, b den Luftdruck, beides in mm Quecksilber bei 0^0; w die Geschwindigkeit des Windes in Metern pro Sekunde; p den Winkel zwischen der Richtung des Windes und der Richtung des Schallstrahles.

Mohn läßt nun v gleichmäßig mit der Höhe nach oben abnehmen. Wenn auch diese Voraussetzung die

[13]) Annal. d. Hydrographie 1892, S. 91, siehe auch [2]) und Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 1902. Braunschweig. 9. Aufl. Bd. I, § 184.

Annahme einer ziemlich komplizierten Zu- oder Abnahme der Temperatur, Feuchtigkeit und Windbewegung mit der Höhe bedeutet und dem wirklichen Zustande der Atmosphäre nur angenähert entspricht, so kommen wir letzterem doch schon bedeutend näher, als wenn wir v als konstant ansehen und damit den Schall sich in geraden Linien fortpflanzen lassen, wie am Schluß von § 1. Es sei also, wenn v_0 die Schallgeschwindigkeit im Niveau der Schallquelle O ist,

$$v_y = v_0 + c\,y.$$

Setzen wir diesen Wert in unsere Gleichung (2) ein, so erhalten wir

$$x = \int \frac{(v_0 + c\,y)\,dy}{\sqrt{a^2 - (v_0 + c\,y)^2}}.$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$x = -\frac{v_0}{c}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 i_0} - \left(1 + \frac{c\,y}{v_0}\right)^2} + \frac{v_0}{c}\operatorname{cotg} i_0,$$

worin die Integrationskonstante so bestimmt ist, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ ist. Durch Umformung erhalten wir

$$(4)\quad \left(x - \frac{v_0}{c}\operatorname{cotg} i_0\right)^2 + \left(y + \frac{v_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{c}\cdot\frac{1}{\sin i_0}\right)^2 = 0$$

als Gleichung der Bahnkurve. Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Zentrum in dem Punkte ξ, η liegt, dessen Radius r ist, wo

$$\xi = \frac{v_0}{c}\operatorname{cotg} i_0;\quad \eta = -\frac{v_0}{c};\quad r = \frac{v_0}{c}\cdot\frac{1}{\sin i_0}.$$

Die Mittelpunkte der Kreise liegen alle in der Parallelen zur X-Achse

$$y = -\frac{v_0}{c}.$$

Wenn c positiv ist (Fig. 3), also die Schallgeschwindigkeit mit der Höhe abnimmt, so liegen die Mittelpunkte der Kreise über der Horizontalen durch die Schallquelle, die Strahlen sind nach unten konvex. Ist c negativ (Fig. 4) und damit die Schallgeschwindigkeit mit der Höhe zunehmend, so liegen die Kreismittelpunkte unter der Horizontalen durch O und die Strahlen sind nach unten konkav.

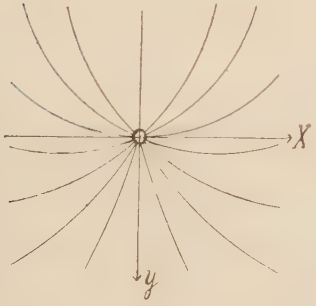

Fig. 3.

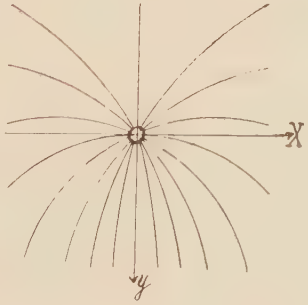

Fig. 4.

Die Krümmung der Strahlen ist um so stärker, je schneller die Schallgeschwindigkeit sich mit der Höhe ändert, und je kleiner der Winkel ist, den ein Strahl beim Ausgang von der Schallquelle mit der Horizontalen bildet.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn wir nun annehmen wollen, daß die Atmosphäre homogen sei,

und nur die Windbewegung der Höhe proportional zunimmt. Nach (3) ist die Schallgeschwindigkeit

$$v = 332 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{\gamma}{b} e}} + w \cos p.$$

Es wird also, wenn w proportional der Höhe zunimmt,

$$w = w_0 + cy,$$

und wenn wir das dann konstante Glied

$$332 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{\gamma}{b} e}} + w_0 \cos p = A$$

setzen, so wird die Schallgeschwindigkeit

$$v = A + c \cos p \cdot y \text{ (c stets negativ).}$$

v wird proportional der Höhe zunehmen, wenn cos p positiv ist, also bei mit dem Winde gehendem Schall, und proportional der Höhe abnehmen, wenn cos p negativ ist, d. h. Schall- und Windrichtung entgegengesetzt ist.

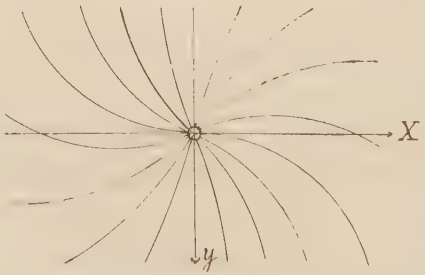

Fig. 5.

Wir erhalten also auch hier Kreise (Fig. 5), deren Mittelpunkte, wenn Wind und Schall aus derselben Richtung kommen, unter der Horizontalen durch die Schallquelle liegen, dagegen über derselben, wenn die Richtung des Windes entgegengesetzt der Schallrichtung ist.

§ 3.

Die Rayleighsche Kettenlinie.

In der Atmosphäre nimmt, wie durch die neueste Luftforschung bewiesen ist, normalerweise am Tage die Temperatur mit der Höhe konstant ab, bei Nacht mit der Höhe konstant zu. Die Temperatur aber ist der Hauptfaktor, der zur Krümmung der Schallstrahlen beiträgt; abgesehen von einer starken Windbewegung, die ein Überwiegen der Kreise zur Folge haben würde. Setzen wir also die Annahme

$$t = t_0 + m y$$

in unsere Gleichung (3) für v ein, indem wir vorläufig von der Feuchtigkeit und der Windbewegung absehen, so erhalten wir

$$v = 332 \sqrt{1 + \alpha t_0 + \alpha m y}, \quad v^2 = 332^2 (1 + \alpha t_0 + \alpha m y).$$

Es ist aber $v_0^2 = 332^2 (1 + \alpha t_0)$, folglich, $332^2 \cdot \alpha \cdot m = p$ gesetzt,

$$v^2 = v_0^2 + p y.$$

Es nimmt also bei unserer Annahme das Quadrat der Schallgeschwindigkeit proportional der Höhe ab. Rayleigh braucht bei seinen Betrachtungen eine an-

genäherte Form dieser Gleichung; indem er sie nach Werten von $\frac{1}{v}$ entwickelt, erhält er

(5) $$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{p y}{2 v_0^3} \text{ *)}$$

Wenn wir jetzt zur Abkürzung $\frac{p}{2 v_0^3} = \beta$ setzen, lautet die Gleichung

$$v^{-1} = v_0^{-1} - \beta y; \quad d(v^{-1}) = -\beta\, dy.$$

Diesen Wert setzen wir ein in unsere allgemeine Gleichung (2) und erhalten

$$x = -\int \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{\beta \sqrt{\frac{a^2}{v^2} - 1}}; \quad -a\beta x = \int \frac{d\left(\frac{a}{v}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{v^2} - 1}}$$

$$= \lg\left[\frac{a}{v} + \sqrt{\frac{a^2}{v^2} - 1}\right]$$

Hierbei ist der Anfangspunkt von x so zu wählen, daß er dem Werte $v = a$ entspricht. d. h. O liegt an der Stelle, wo der Strahl horizontal ist. Drücken wir dann v in Werten von x aus, so finden wir

$$e^{-a\beta x} = \frac{a}{v} + \sqrt{\frac{a^2}{v^2} - 1}$$

$$\frac{2a}{v} = e^{-a\beta x} + e^{-a\beta x}.$$

*) In Rayleighs Schalltheorie, deutsch von Neesen [siehe 6)] hat sich an dieser Stelle (Bd. II, S. 155) ein Druckfehler eingeschlichen: In dieser Gleichung (und in der für β) steht anstelle der Konstanten v_0, die Variabele v im zweiten Gliede der rechten Seite.

Diesen Wert setzen wir ein in unsere Formel (5) und erhalten

$$(6) \qquad \beta y = v_0 - 1 - \frac{1}{2a}\left(e^{a\beta x} + e^{-a\beta x}\right).$$

Diese Gleichung stellt eine Kettenlinie dar mit dem linearen Parameter $\frac{2 v_0^3}{p \cdot a}$.

§ 4.

Die Matthiessensche Parabel.

Zunächst wollen wir nun statt der Schallgeschwindigkeit v den Brechungsexponenten n einführen; und zwar werde, wie üblich, der Brechungsexponent der Luft bei 0^0 gleich 1 gesetzt. Dann ist

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{v_1}{v_0}; \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}; \quad \frac{n_{n-1}}{n_n} = \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

worin v_0 und n_0 dem Niveau der Schallquelle entsprechen. Durch Multiplikation aller n-Gleichungen erhält man

$$\frac{n_0}{n_n} = \frac{v_n}{v_0}. \tag{7}$$

Diese Formel wollen wir jetzt anwenden, um den Zusammenhang der Schallgeschwindigkeit einer Schicht mit dem Brechungsexponenten derselben Schicht zu erläutern. Wir nehmen an n_n sei der Brechungsexponent der Schicht, in der die Temperatur 0^0 herrscht, also gleich 1. Die Schallgeschwindigkeit v_n dieser Schicht ist dann 332 Meter in der Sekunde. Also ist nach (7)

$$n_0 = \frac{332}{v_0}.$$

Durch Division mit der Gleichung (7) erhält man

$$n_n = \frac{332}{v_n}. \tag{8}$$

Unsere allgemeine Gleichung (2) gibt unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (7)

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{n_n}{n_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 i_0} - 1}}.$$

Setzt man in diese Gleichung das Matthiessensche Refraktionsgesetz

$$n = \sqrt{1 + \frac{y}{a}}$$

ein, worin natürlich a eine ganz andere Konstante ist als in Gleichung (2), so ergibt sich als Gleichung der Trojektorie

$$x = \int \frac{\sin i_0 \, dy}{\sqrt{\cos^2 i_0 + \frac{y}{a}}}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$y = x \operatorname{cotg} i_0 + \frac{x^2}{4 a \sin^2 i_0}$$

als Gleichung der Schallstrahlen, wobei die Integrationskonstante so gewählt ist, daß $x = 0$; $y = 0$ der Gleichung genügt, d. h. alle Strahlen durch die Schallquelle gehen. Diese Gleichung stellt eine Schar von Parabeln dar, deren Scheitelpunkte auf einer Ellipse liegen, und die als Umhüllende die Parabel mit der Gleichung

$$y = -a + \frac{x^2}{4 a}$$

haben. Wir erhalten also ein Bild, welches genau dem Bild der Wurfparabeln entspricht, nur liegt die Öffnung der Parabeln hier im Normalfall nicht nach unten, sondern nach oben. Die parabolische Gleichung der Enveloppe bezeichnet die Begrenzung des sogenannten Schallschattens.

§ 5.

Andere Elemente der Luftbeschaffenheit.

Um nun zu untersuchen, wieweit die Schallgeschwindigkeit von der Feuchtigkeit abhängt, setzen wir in Gleichung (3) den Normaldruck 760 mm ein und erhalten

$$v = 332 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{1 - 0{,}0005\, e}} + w \cos p.$$

Wir sehen also: wenn wir für e den sehr hohen Dampfdruck 20 mm setzen, so ist die Korrektion unter der Wurzel immer erst ein Tausendstel. Da aber die Feuchtigkeit stets mit der Höhe abnimmt, so ist die Wirkung die, daß die Feuchtigkeit die Strahlen stets ein wenig nach oben krümmt. Jedoch ist diese Krümmung eine so geringe, daß wir sie bei der weiteren Untersuchung vernachlässigen können gegenüber der Genauigkeit mit der die Zahl 332, d. i. die Schallgeschwindigkeit bei 0^0 bestimmt ist.

Daß eine starke Windbewegung die Schallstrahlen zu Kreisen krümmt, haben wir schon am Schluß von § 2 gesehen.

Bezüglich der Temperaturänderung erübrigt noch, die Gleichung aufzustellen, die wir erhalten, wenn wir

für v nicht eine angenäherte Form einsetzen, sondern die auf Seite 20 in § 3, abgeleitete

$$v^2 = v_0^2 + p\,y.$$

Es ergibt sich dann nach (2) die Gleichung

$$\frac{p\,x}{2} = \int \frac{v^2\,dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

deren Integration nach einigen Umformungen zu der Gleichung

$$\frac{p\,x}{a^2} \quad \arcsin\frac{v}{a} - \frac{v}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2} - i_0 + \cos i_0 \sin i_0$$

führt.

Durch Einführung von y in diese Gleichung erhalten wir

$$\frac{p\,x}{a^2} = \arcsin\sqrt{\sin^2 1_0 + \frac{p\,y}{a^2}}$$

$$- \sqrt{\sin^2 i_0\ \cos i^2{}_0 + \frac{p\,y}{a^2} + \left(\frac{p\,y}{a^2}\right)^2} - i_0 + \cos i_0\ \sin i_0.$$

Diese Kurve genauer zu untersuchen würde uns zu weit führen, da wir ihre ungefähre Gestalt schon aus den in den §§ 2 bis 4 behandelten Gleichungen ersehen können.

Schlußfolgerungen.

Zum Schlusse wollen wir die durch Refraktion bewirkte verschiedene Hörweite des Schalles zu den verschiedenen Tagesstunden und Jahreszeiten, entsprechend der wahrscheinlichen Beschaffenheit der Atmosphäre einer kurzen Prüfung unterziehen. In Betracht kommt auch hier hauptsächlich die Temperatur; denn die Feuchtigkeit verringert die Hörweite des Schalles nur um ein geringes, da sie nach § 5 die Strahlen etwas nach oben beugt; und bei der Windbewegung ist nach § 2 der Effekt der, daß die Hörbarkeit mit dem Winde nur durch die abnehmende Intensität des Schalles begrenzt wird, während sie gegen den Wind eine sehr beschränkte ist. Anders verhält es sich mit der Temperatur. Hier tritt nur dann ein durch die Enveloppe der Strahlen begrenzter Schallschatten und damit eine Verkürzung der Hörbarkeit auf, wenn die Temperatur mit der Höhe abnimmt. (Vergl. [12]) S. 35 u. Fig. 6).

Nach Hann [14]) ist der tägliche Gang der Temperatur der, daß im allgemeinen von kurz nach Sonnenaufgang bis kurz nach Sonnenuntergang die Temperatur mit

[14]) Hann, Lehrbuch der Meteorologie. 1901, Leipzig, S. 118 ff.

der Höhe abnimmt, und zwar am stärksten in den Mittagsstunden. Während der Nachtstunden dagegen findet fast stets eine Temperaturumkehr statt, d. h. die Temperatur nimmt mit der Höhe zu. Die Wirkung ist die, daß im allgemeinen während der Nacht der Schall am weitesten hörbar ist. Es tritt kein Schallschatten auf, und die Töne verklingen leise mit der Entfernung, starke Töne, z. B. bei Nebelsignalen [15]), sind bei zirka 20 km hörbar. Nach Sonnenuntergang verringert sich die Hörweite, bis sie in den ersten Nachmittagsstunden ihr Minimum erreicht, welches im Grenzfalle kaum 2 km beträgt. Dann steigt die Hörweite wieder bis nach Sonnenuntergang.

Auch der jährliche Gang der Temperatur wird von einigem Einfluß auf die Hörbarkeit des Schalles sein. Sie wird wegen der geringeren Temperaturabnahme im Winter weit weniger variieren, als im Sommer.

Am sichersten aber wird es in Praxi stets sein, in jedem einzelnen Falle die Abnahme der Windbewegung und der Temperatur mit der Höhe zu messen, aus der sich dann leicht auf die Krümmung der Schallstrahlen und die Hörweite des Schalles schließen läßt.

[15]) Price-Edwards, Schallsignale. Annal. d. Hydrographie, 1902, S. 406.

Zum Schlusse spreche ich meinem hochverdienten Lehrer, Herrn Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen meinen besten Dank aus für die Überlassung des Themas und die gütige Durchsicht der Arbeit.

Auch meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Wachsmuth, sowie dem Direktor der Rostocker Navigationsschule, Herrn Dr. Soeken danke ich verbindlichst für die gütige Überlassung von Büchern.